J. Lake Sci.(湖泊科学),2026,38(6):000-000
DOI 10.18307/2026.0644
©2026 by *Journal of Lake Sciences*

基于 Muskingum 的微分形式河网流量演算方法研究*

丁震[1]，赵建飞[1]，甄峰[2]，王军[1]，李彬权[1]，胡义明[1]，梁忠民[1]**
（1：河海大学水文水资源学院，江苏 南京 210098）
（2：江苏省水利工程科技咨询股份有限公司，江苏 南京 210029）

摘 要：河网流量演算是流域水文模拟的重要组成，其中 Muskingum 是常用方法之一。但现有 Muskingum 方法多采用差分离散形式方程，不仅引入了数值求解误差，而且难以与微分形式水文模型实现时间尺度一致的耦合。为此，本文基于微分形式 Muskingum 河道流量演算方法，使用矩阵组装河网所有河道相应方程，引入连通性矩阵确定其组成河道的入流，提出了基于 Muskingum 的微分形式河网流量演算方法（ODE-MR）；并将其与微分形式新安江模型进行耦合，构建了全过程微分表达的流域水文模型。微分与差分方程形式的对比实验显示，以解析解为基准，ODE-MR 的均方根误差处于 10^{-4} m³/s 量级，可有效降低差分形式 Muskingum 法的数值误差；与微分形式水文模型的耦合方法对比实验表明，通过缩短计算时间步长，混合微分-差分耦合方法的结果逐渐收敛于全微分耦合方法，说明全微分耦合方法具有更高的模型精度；实际流域应用验证表明，日尺度上，基于 ODE-MR 的全微分耦合模型在屯溪流域的多年平均 Nash-Sutcliffe 效率系数提升 0.04，表明控制数值误差可提高模拟精度。研究可为微分形式统一框架下的水文建模、水文-交叉学科模型耦合提供参考。
关键词：Muskingum 方法；微分形式；河网流量演算；矩阵组装；连通性矩阵；新安江模型

Research on the Muskingum-based Differential Form River Network Discharge Routing Method*

Ding Zhen[1], Zhao Jianfei[1], Zhen Feng[2], Wang Jun[1], Li Binquan[1], Hu Yiming[1] & Liang Zhongmin[1]**
(*1: College of Hydrology and Water Resources, Hohai University, Nanjing 210098, P.R.China*)
(*2: Jiangsu Province Water Conservancy Engineering Sci-tech Consulting Co., Ltd., Nanjing 210029, P.R.China*)

Abstract: River network discharge routing is a key component of watershed hydrological modeling. The Muskingum method is one of the most widely used tools for this process. Traditional applications of the Muskingum method often rely on discrete difference equations. These equations introduce numerical errors and prevent consistent temporal-scale coupling with hydrological models built on differential formulations. To address this issue, this study develops a differential-form Muskingum method for river discharge routing. This method integrates the governing ordinary differential equations (ODEs) of all river segments through matrix operations. A connectivity matrix is defined to quantify upstream inflows for each channel. Based on this, the Muskingum-based Ordinary Differential Equation River-network Discharge Routing method (ODE-MR) is proposed. The ODE-MR is then coupled with the differential-form Xinanjiang hydrological model to build a fully differential hydrological modeling framework. Comparative experiments using analytical solutions as benchmarks show that the root mean square error of the ODE-MR is on the order of 10^{-4} m^3/s. This value greatly reduces the numerical inaccuracies inherent in the traditional difference-based Muskingum method. Additional experiments on coupling strategies with differential hydrological models indicate that the outputs of the hybrid differential-difference coupling approach gradually approach those of the fully differential coupling method as the time step decreases. This finding demonstrates the higher simulation accuracy of the fully differential coupling method. Applications in the Tunxi River Basin further verify the model performance. At the daily scale, the fully differential coupling model based on ODE-MR increases the multi-year average Nash-Sutcliffe efficiency coefficient by 0.04. This improvement confirms that effective numerical error control can enhance hydrological simulation accuracy. This study provides a reliable reference for hydrological simulation and interdisciplinary model integration within a unified differential equation framework.
Keywords: Muskingum method; Differential form; River network discharge routing; Matrix assembly; Connectivity matrix; Xinanjiang model

在我国现行的洪水预报业务系统以及美国国家水模型等主要国际业务预报体系中，流域水文模型均遵循共同的基本框架：将流域划分为多个计算单元（或子流域），计算各单元的产汇流过程，并通过河网演算形成流域出口的洪水流量过程[1,2]，因此河网流量演算是流域水文模型的重要组成。其中，Muskingum 法是最常用的河网流量演算方法，已有研究从理论基础、参数确定等方面不断完善。例如，Cunge[3]对 Muskingum 法进行水力学推导，建立了 Muskingum 参数与河道水力要素的联系；在此基础上，Todini[4]进

*2026-02-02 收稿；2026-03-13 收修改稿。
国家自然科学基金项目（52379007，42501046）联合资助。
**通信作者；E-mail: zmliang@hhu.edu.cn。

一步解决了该推导过程中的质量守恒问题。但目前普遍采用的仍是其差分形式离散演算方程[4,5]。

理论研究表明，差分求解引入的数值误差是水文模型不确定性来源之一，并随降雨强度的增加而放大[6,7]。近年来，水文模型在方法论上呈现出由差分形式向微分形式演进的趋势[8]，目的是降低控制数值误差以提升模型精度，同时易于与生态、环境、大气等交叉学科模型的耦合[9]。在计算单元尺度，水文模型的微分形式化已取得较多研究成果。一方面，经典水文模型的核心方程被重写为常微分方程，如 GR4J[10]、HBV[11]、TOPMODEL[12]以及新安江模型[13]等，实现了数学方程与差分数值解法的分离；另一方面，近年来提出的新模型，如 WALRUS、EXP-Hydro 等，在设计之初就采用了微分形式方程。在此基础上，进一步发展出以微分方程为核心的通用水文建模框架，如 SuperflexPy[14]、MARRMoT[15]等。但在河网层面，对微分形式水文学汇流方法研究相对较少[14,15]。现有研究大多是将微分形式水文模型的输出作为差分形式河网流量演算方法的输入，导致河网演算环节重新引入了数值误差[14]，降低了微分模型的整体效果。虽然陆旻皎[16]提出了微分形式的 Muskingum 方程，但其研究仍局限于单一河道，需要进一步扩展以使其能应用于河道串并联的河网水系；同时，该研究是以实测流量作为河道入流输入，并未考虑如何与微分形式的水文模型耦合。因此，构建能够体现水系拓扑结构，并可与微分形式水文模型统一耦合的河网流量演算方法，以形成完整微分形式的水文模型系统，值得深入研究。

本文在单一河道微分形式 Muskingum 方法的基础上，采用矩阵组装河网所有河道的微分形式流量演算方程，引入连通性矩阵描述水系拓扑、确定组成河道的出流/入流映射，推导了基于 Muskingum 的微分形式河网流量演算方程；并将其与微分形式新安江（ODE-XAJ）模型耦合，实现了流域产流—汇流全过程的微分统一框架表达。提出的基于 Muskingum 的微分形式河网流量演算方法，可为经典流域水文模型由差分形式向微分形式转换提供参考与支撑。

1 研究方法

1.1 河网拓扑

河网由相互串并联的多条河道组成。不失一般性，本次研究不考虑分汊情况，即每个河道可有多个上游河道汇入，但最终只有一个下游河道汇出[17]；所有河道均可考虑旁侧入流。河网拓扑示意如图 1(a)所示。

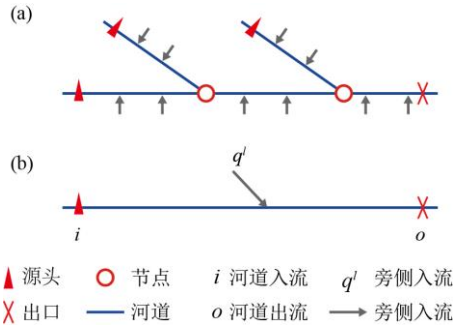

图 1 河网拓扑结构(a)及河道概化(b)示意

Fig.1 The diagram of river network topology (a) and channel conceptualization (b)

1.2 单一河道 Muskingum 理论

Muskingum 法由 McCarthy[18]于 1938 年提出，在河道洪水演算中广泛应用，其核心为水量平衡原理、河道蓄量与上游入流/出流的线性假设[4]。对于如图 1(b)所示的单条河道，考虑旁侧入流，相应方程为：

$$\frac{s_\alpha(t+\Delta t)-s_\alpha(t)}{\Delta t}=\frac{i_\alpha(t)+i_\alpha(t+\Delta t)}{2}-\frac{o_\alpha(t)+o_\alpha(t+\Delta t)}{2}+\frac{q_\alpha^l(t)+q_\alpha^l(t+\Delta t)}{2} \tag{1}$$

$$s_\alpha(t)=k_\alpha[x_\alpha i_\alpha(t)+(1-x_\alpha)o_\alpha(t)] \tag{2}$$

式中，t为时间，s；Δt为时间步长，s；下标α代表河道编码，α=1, 2, …, m，m 为总河道数；s为河道蓄量，m^3；i和o分别为河道上游入流与河道出流，m^3/s；q^l为河道旁侧入流，m^3/s；k为槽蓄系数，s；x为上游入流/出流权重系数。将公式(2)代入公式(1)，可得到经典差分形式的 Muskingum 方程。

基于 Muskingum 的差分形式方程（公式(1)和(2)），区分状态变量和模型通量，构建状态变量控制方程，推导模型通量本构方程[9]，从而形成微分形式 Muskingum 方法。其中，状态变量的量纲随时间无关，而通量用于描述水量交换速率，其量纲与时间相关。通过对公式(1)的变量进行量纲分析，确定s_α为状态变量，i_α、o_α、q_α^l为模型通量。

控制方程用于描述流域系统状态变量随时间的演变过程，依据水量平衡原理，其方程为：

$$\frac{\mathrm{d}s_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=i_\alpha(t)-o_\alpha(t)+q_\alpha^l(t) \tag{3}$$

本构方程则用于建立未知通量与状态变量或其他已知通量之间的关系。公式(3)等号右侧i_α、q_α^l为已知输入通量，需要进一步确定o_α的本构方程，使得微分方程闭合。基于 Muskingum 的线性假设，对公式(2)进行变形，并代入公式(3)，可得：

$$\frac{\mathrm{d}s_\alpha(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{k_\alpha(1-x_\alpha)}s_\alpha(t) + \frac{1}{1-x_\alpha}i_\alpha(t) + q_\alpha^l(t) \tag{4}$$

$$o_\alpha(t) = \frac{1}{k_\alpha(1-x_\alpha)}s_\alpha(t) - \frac{x_\alpha}{1-x_\alpha}i_\alpha(t) \tag{5}$$

结合公式(4)和(5)，形成了微分形式的 Muskingum 河道流量演算方法[16]。

1.3 基于 Muskingum 的微分形式河网流量演算方程推导

针对河网的各条组成河道，分别使用微分形式 Muskingum 方法进行河道流量演算，根据河网拓扑依次确定每条河道的上游入流和区间入流，形成基于 Muskingum 的微分形式河网流量演算方法（ODE-MR）。

对于每条组成河道，都需要使用基于线性运算的公式(4)和(5)，因此适合使用矩阵进行表达，具体为：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{i}(t) + \boldsymbol{q}^l(t) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{o}(t) = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{i}(t) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_\mathrm{m} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Psi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Psi_\mathrm{m} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{9}$$

式中，$\boldsymbol{s}$为河网组成河道的蓄量向量，$\boldsymbol{s} = [s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_\mathrm{m}]^T$，$\mathrm{m}^3$；$\boldsymbol{i} \in \mathbb{R}^\mathrm{m}$为河网组成河道的上游入流向量，$\boldsymbol{i} = [i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_\mathrm{m}]^T$，$\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$；$\boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^\mathrm{m}$表示河网组成河道的出流向量，$\boldsymbol{o} = [o_1,\ o_2,\ \ldots,\ o_\mathrm{m}]^T$，$\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$；$\boldsymbol{q}^l \in \mathbb{R}^m$表示河网组成河道的旁侧入流向量，$\boldsymbol{q}^l = \left[q_1^l,\ q_2^l,\ \ldots,\ q_\mathrm{m}^l\right]^T$，$\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$。$\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}$和$\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}$为与河道蓄量向量相关的系数矩阵，$\phi_\alpha = -1/k_\alpha/(1-x_\alpha)$，$\Psi_\alpha = 1/k_\alpha/(1-x_\alpha)$，下标α代表河道编码，α=1, 2, …, m，m为总河道数；$\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}$和$\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}$为上游入流相关的系数矩阵，$\lambda_\alpha = 1/(1-x_\alpha)$，$\omega_\alpha = -x_\alpha/(1-x_\alpha)$。在 Muskingum 参数取值范围内，公式(6)系数矩阵的$\boldsymbol{\Phi}$特征根均为负数，为线性耗散系统，因此从数学上可证明具有稳定性[19]。

根据是否有上游河道，河网的组成河道进一步可分为源头河道和非源头河道。源头河道的上游入流为相应源头子流域出流，非源头河道的上游入流则为直接相连上游河道出流之和。引入连通性矩阵表征河网拓扑[20]，河网组成河道的上游入流可表示为：

$$\boldsymbol{i}(t) = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{o}(t) + \boldsymbol{q}^c(t) \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_\mathrm{m1} & \theta_\mathrm{m2} & \cdots & \theta_\mathrm{mm} \end{bmatrix} \tag{11}$$

式中，$\boldsymbol{\Theta}$为连通性矩阵，元素θ_ab用于表示河道a与河道b的水力联系，若河道a为河道b的直接上游，则θ_ab取 1，否则取 0；$\boldsymbol{q}^c \in \mathbb{R}^\mathrm{m}$为河网组成河道的源头子流域出流，$\boldsymbol{q}^c = [q_1^c,\ q_2^c,\ \ldots,\ q_\mathrm{m}^c]^T$，$\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$，非源头河道的相应出流为 0。将公式(7)代入公式(10)，可显式求解出$\boldsymbol{i}(t)$：

$$\boldsymbol{i}(t) = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Omega}]^{-1}[\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{q}^c(t)] \tag{12}$$

从数学角度上，上式的逆矩阵具有普遍可求解性[21]。河网所有河道的流量演算方程通过公式(6)、(7)和(12)的矩阵组装，可将逐河道的递推计算转化为河网尺度的矩阵-向量整体运算，实现了河网演算关系的统一描述，且具备更高的计算效率和可扩展性。

14 基于 Muskingum 的微分形式河网流量演算方法步骤

ODE-MR 主要包含以下五个步骤（如图 2 所示）：

（1）基于河网拓扑，采用公式(11)构建连通性矩阵$\boldsymbol{\Theta}$。

（2）根据河网各组成河道的 Muskingum 参数（表 1），通过公式(8)和(9)计算系数矩阵$\boldsymbol{\Phi}$，$\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{\Psi}$，$\boldsymbol{\Omega}$。

（3）计算河网入流向量$\boldsymbol{i}$：设定各源头河道的源头子流域出流（模型模拟或实际观测），非源头河道则设为 0，构建河网组成河道的源头子流域出流向量$\boldsymbol{q}^c$。利用步骤 1 和 2 得到的$\boldsymbol{\Theta}$、$\boldsymbol{\Psi}$、$\boldsymbol{\Omega}$，采用式(12)将$\boldsymbol{q}^c$转换为河网组成河道的上游入流向量$\boldsymbol{i}$；在此过程中，非源头河道的入流被其上游河道出流之和代替，而源头河道的入流保持不变。

（4）构建河网旁侧入流向量$\boldsymbol{q}^l$：对于第α条河道，由模型模拟或实际观测确定其旁侧入流标量q_α^l；随后将所有河道的q_α^l依次拼接，构建河网组成河道的旁侧入流向量$\boldsymbol{q}^l$。

（5）构建常微分方程系统：将步骤 2 中获得的系数矩阵$\boldsymbol{\Phi}$，$\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{\Psi}$，$\boldsymbol{\Omega}$，步骤 3 中构建的$\boldsymbol{i}$，以及步骤 4 中的$\boldsymbol{q}^l$代入式(6)和(7)，即可得到 ODE-MR 对应的常微分方程组。

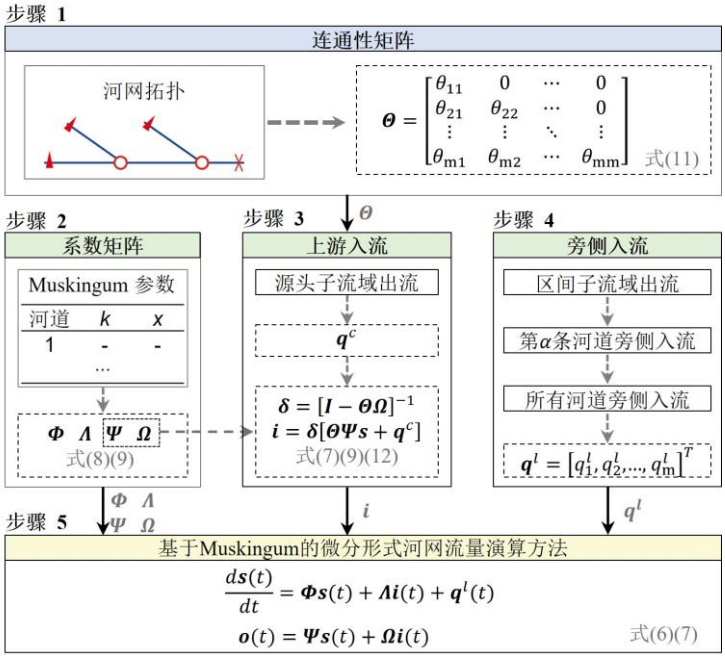

图 2 基于 Muskingum 的微分形式河网流量演算方法计算步骤

Fig.2 Computation steps of the differential-form river network routing method based on the Muskingum model

表 1 Muskingum 方法参数物理意义及取值范围

Tab.1 Physical significance and value range of Muskingum method

参数	物理含义	取值范围
k	槽蓄系数	[0, 50]
x	上游入流/出流权重系数	[0, 0.5]

2 数值实验和实际应用

为评估 ODE-MR 的理论有效性和实际适用性，设计了三种实验验证方案：

（1）方程形式对比实验。经典差分形式和微分形式 Muskingum 方法本质上是同一汇流方法的不同数学形式表达，二者的数值误差受方程离散形式和求解方法影响。为了检验微分形式 Muskingum 方法在汇流模块中数值精度上的优势，采用相同的模型输入与参数取值，评估经典差分形式和微分形式 Muskingum 方法对其解析解的近似程度。

（2）耦合方法对比实验。流域水文模拟中，通常采用水文模型的输出累积量作为河网流量演算的时段输入量，将水文模型的瞬时输出在时段上作了平均，不可避免地引入数值误差。为了量化不同耦合方法引入的数值误差，设定相同的模型参数，以实际流域水文气象数据为输入，引入微分形式水文模型，分别耦合两种形式的 Muskingum 方法，分析不同耦合方法可能引入的数值误差。

（3）实际流域应用验证。使用实际流域的河网拓扑和水文气象资料，建立基于经典差分形式和微分形式 Muskingum 法的两种耦合模型，分别率定其最优参数，基于日模型与次洪模型流量模拟结果评估两类模型的精度。

2.1 方程形式对比实验

基于单一河道并忽略河道旁侧入流，使用零初始条件，以 Muskingum 法的解析解[22]为基准，评估其经典差分形式和微分形式的数值误差。Muskingum 法的解析解为：

$$u(\Delta t,t)=\frac{1}{\Delta t}\left\{\frac{1}{1-x_\alpha}\left[exp\left(-\frac{t-\Delta t}{k_\alpha-k_\alpha x_\alpha}\right)-exp\left(-\frac{t}{k_\alpha-k_\alpha x_\alpha}\right)\right]-\frac{x_\alpha}{1-x_\alpha}[H(t)-H(t-\Delta t)]\right\} \tag{13}$$

式中，$u(\Delta t,t)$表示时段为Δt的单位线；$H(t)$为单位脉冲函数，在$t=0$时$H(t)=0$，$t>0$时$H(t)=1$。

基于 Muskingum 参数取值范围（表 1），采用对称拉丁超立方体（SLH）方法[23]采样生成 1000 组参数组合。使用 50 组不同强度的上游输入过程，其总量均为 100m^3，包括 5 组恒定强度的输入，其序列长度分别为 1、2、5、10 和 20；以及 45 组变化强度的输入，其序列长度为 20，具体数值采用随机数生成。通过将上游输入过程与单位线进行卷积，得到河道出流的解析解：

$$\hat{Q}(t) = i(t) \otimes u(\Delta t,\ t) \tag{14}$$

式中，i与$\hat{Q}$分别为上游入流和出流解析解，m³/s；$\otimes$为卷积符号。

采用五阶显式 Dormand-Prince Runge-Kutta（DP5）方法[24]求解微分形式 Muskingum 法。DP5 方法基于局部截断误差，自适应调整时间步长，具有较高的效率和精度，对应公式为：

$$e_{\mathrm{lt}} \le \tau_{\mathrm{a}} + \tau_{\mathrm{r}} \cdot \max\left(|\boldsymbol{y}_{\mathrm{t}}|,\ |\boldsymbol{y}_{t+\Delta t}^{(5)}|\right) \tag{15}$$

式中，e_{lt}为局部截断误差，mm；$\boldsymbol{y}_t$为状态变量向量在t时刻的取值，mm；$\boldsymbol{y}_{t+\Delta t}^{(5)}$为$t+\Delta t$时刻状态变量向量高阶解，mm；$\tau_{\mathrm{a}}$是绝对误差容限，mm；$\tau_{\mathrm{r}}$是相对误差容限。在本研究中，$\tau_{\mathrm{a}}$和$\tau_{\mathrm{r}}$都取 10^{-6}。

通过均方根误差（E_{RMS}）评估经典差分形式和微分形式 Muskingum 法与其解析解之间的偏差，公式为：

$$E_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left[Q(t) - \hat{Q}(t)\right]^2} \tag{16}$$

式中，N为时间步个数；Q是差分/微分形式 Muskingum 法的模拟流量，m³/s；$\hat{Q}$是 Muskingum 法的解析解，m³/s。

2.2 耦合方法对比实验

实验基于单一源头子流域及单一河道的串联系统，忽略河道旁侧入流。其中，源头子流域采用微分形式水文模型，单一河道分别采用经典差分形式和微分形式 Muskingum 法，形成混合微分-差分（Differential-difference, DD）与全微分（Fully differential, FD）两种耦合模型，相应耦合方法记为 DD 方法和 FD 方法，用以评估两类耦合方法产生的数值误差。源头子流域使用基于蓄满产流机制的新安江（Xinanjiang, XAJ）模型，该模型在我国湿润和半湿润地区得到广泛应用[25]，其微分形式（ODE-XAJ）见参考文献[13]，其方程可概化为：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{g}}[\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{F}(t), t; \boldsymbol{\sigma}] \tag{17}$$

$$q(t) = \boldsymbol{f}_{\mathrm{c}}[\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{F}(t), t; \boldsymbol{\sigma}] \tag{18}$$

式中，t为时间，s；q为 XAJ 模型模拟流量，m³/s，对于第α条河道，其源头子流域的模拟流量记为q_{α}^{c}，其区间子流域的模拟流量记为q_{α}^{l}；$\boldsymbol{U}$为 XAJ 模型状态变量向量（如自由水蓄量等），mm；$\boldsymbol{F}$为 XAJ 模型输入向量，mm/s；$\boldsymbol{\sigma}$为 XAJ 模型参数；$\boldsymbol{f}_{\mathrm{g}}$和$\boldsymbol{f}_{\mathrm{c}}$为 XAJ 模型通量本构方程组及模拟流量函数。

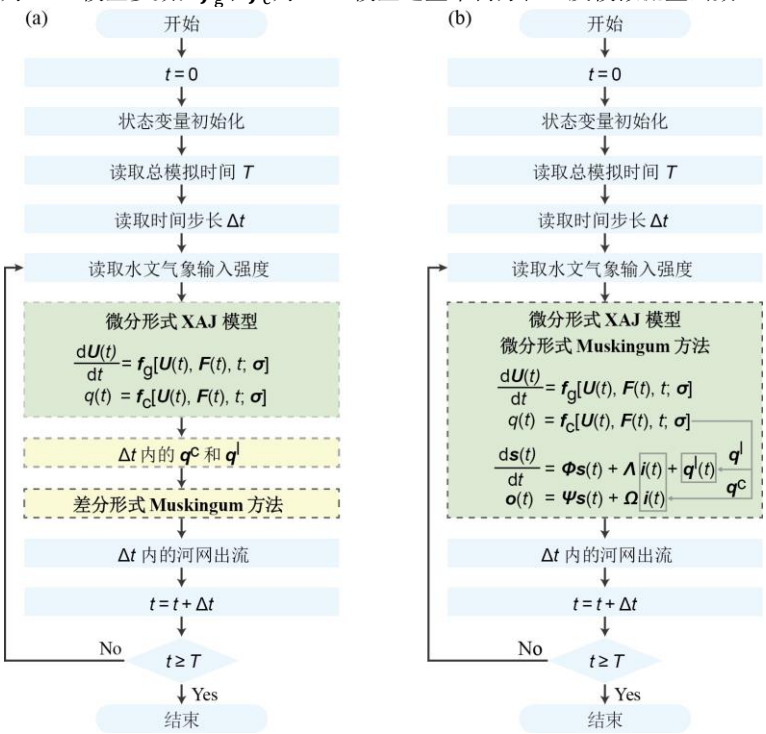

图 3 混合微分-差分方法(a)与全微分方法(b)计算流程对比

Fig.3 Calculation procedure of differential-difference method (a) and fully differential method (b)

两类耦合方法计算流程如图 3 所示。DD 和 FD 方法开始时均需初始化状态变量、读取总模拟时间T和

时间步长Δt，随后按Δt进行循环，达到T后模拟结束。在每个时间步开始时，两类模型均需读取水文气象输入强度，其区别在于：DD 方法首先基于水文气象输入强度和 ODE-XAJ，计算Δt内河道上游入流的时段均值，然后将该均值作为差分形式 Muskingum 法的输入，得到Δt内的河道出流时段均值；而 FD 方法将 ODE-XAJ 和微分形式 Muskingum 法表示为一组常微分方程（ODEs），ODEs 内部通过河道上游入流强度（瞬时值）链接，在输入水文气象输入强度后，可直接输出Δt内的河道出流时段均值。

上述 ODEs 难以直接推求其解析解，因此采用收敛性测试方法进行评估。差分/微分形式方程具有数学一致性，理论上，随着Δt趋于 0，DD 模型（基于差分形式方程）应收敛至 FD 模型（基于微分形式方程）的解[26]。为此，在 XAJ 模型和 Muskingum 法的参数取值范围内，使用 SLH 方法分别采样 100 组参数，形成 100×100 个参数组合，水文气象输入为 2007 年屯溪流域的逐日降水蒸发实测数据。FD 模型的时间步长为Δt，DD 模型的时间步长分别取Δt以及Δt的 1/2、1/5、1/10、1/20、1/50、1/100 和 1/200。两类模型均采用 DP5 求解，在相同参数条件下，以 FD 模型为基准，使用E_{RMS}评估 DD 模型在不同时间步长下解的偏差。XAJ 模型参数物理意义及取值范围见**错误!书签自引用无效。**。

2.3 实际流域应用验证

选择湿润山丘区屯溪流域为研究区。屯溪流域位于新安江上游，面积为 2670km^2，地处亚热带季风气候区，地势西高东低，雨量丰沛，年平均降雨量约 1880mm。水系及站点分布如图 4(a)所示，选用屯溪、月潭水文站点及宕里、深坞口、岩前、琅斯、万安五个控制点作为子流域出口，划分 7 个子流域，以 9 条河道相互连接，子流域及水系拓扑如图 4(b)所示。

表 2 XAJ 模型参数物理意义及取值范围[13]

Tab.2 Physical significance and value range of XAJ model parameters

模块	参数	物理意义	范围	单位
蒸散发模块	K_e	潜在蒸散发折算系数	[0.6, 1.5]	-
	c	深层蒸散发折算系数	[0.1, 0.2]	-
	W_{um}	流域上层土壤平均张力水蓄水容量	[5, 30]	mm
	W_{lm}	流域下层土壤平均张力水蓄水容量	[60, 90]	mm
	W_{dm}	流域深层土壤平均张力水蓄水容量	[15, 40]	mm
产流模块	A_{imp}	不透水面积比例	[0.01, 0.2]	-
	b	流域张力水蓄水容量曲线指数	[0.1, 0.4]	-
分水源模块	S_m	流域平均自由水蓄水容量	[10, 30]	mm
	ex	流域自由水蓄水容量曲线指数	[1, 1.6]	-
	K_i	壤中流出流系数	[0.1, 0.55]	-
	K_g	地下径流出流系数	0.7 - K_i	-
汇流模块	C_i	壤中流消退系数	[0.5, 0.95]	-
	C_g	地下径流消退系数	[0.95, 0.999]	-
	n	串联线性水库个数	[1, 10]	-
	K_f	串联线性水库蓄泄系数	[0.01, 20]	d

使用日/小时尺度实测降水、流量和蒸发资料，数据来源为水文年鉴，子流域面平均降水通过算术平均法计算得到，资料年限为 2007-2019 年。采用协方差矩阵自适应演化算法（CMA-ES）[27]进行参数优化，分别率定混合微分-差分与全微分两类模型的参数，目标函数为 1-E_{KG}最小。混合微分-差分与全微分模型采用相同的建模方法，首先基于月潭站实测流量率定其上游子流域（W1、W2 和 W5）及河道（R1、R2、R5）的参数，子流域共用一组 XAJ 参数，河道间 Muskingum 参数可以不同。由于月潭上游子流域和万安上游子流域（W3、W4 和 W6）均位于流域上游，植被等下垫面特征较为相似，且 W3、W4 和 W6 出口断面缺乏实测站点，因此本文将月潭上游子流域 XAJ 模型参数移用至万安上游子流域。基于屯溪站实测流量率定剩余子流域（W7）及剩余河道（R3、R4、R6、R7、R8 和 R9）的模型参数。根据 Kling-Gupta 效率系数（E_{KG}）、Nash-Sutcliffe 效率系数（E_{NS}）及洪水高流量偏差（E_{FHV}）、低流量偏差（E_{FLV}）评估日模型精度[28,29]，公式为：

$$E_{\mathrm{FHV}}=\frac{\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{h}}(Q_{\mathrm{high,j}}-\hat{Q}_{\mathrm{high,j}})}{\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{h}}\hat{Q}_{\mathrm{high,j}}}\times 100\% \tag{19}$$

$$E_{\mathrm{FLV}}=\frac{\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{l}}(Q_{\mathrm{low,k}}-\hat{Q}_{\mathrm{low,k}})}{\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{l}}\hat{Q}_{\mathrm{low,k}}}\times 100\% \tag{20}$$

式中，$\hat{Q}_{\mathrm{high}}$为最高 2%流量实测值，m^3/s；Q_{high}为最高 2%流量模拟值，m^3/s；h为最高 2%流量对应时段的总个数，j为某径流值在h个流量值中的排位；$\hat{Q}_{\mathrm{low}}$为最低 30%流量实测值，m^3/s；Q_{low}为最低 30%流量模拟值，m^3/s；l为最低 30%流量对应时段的总个数，k为某径流值在l个流量值中的排位。次洪精度评估选择E_{KG}、E_{NS}、洪量相对误差（E_{FVR}）、洪峰相对误差（E_{FPR}）以及洪峰滞时（E_{FPL}）五个指标。

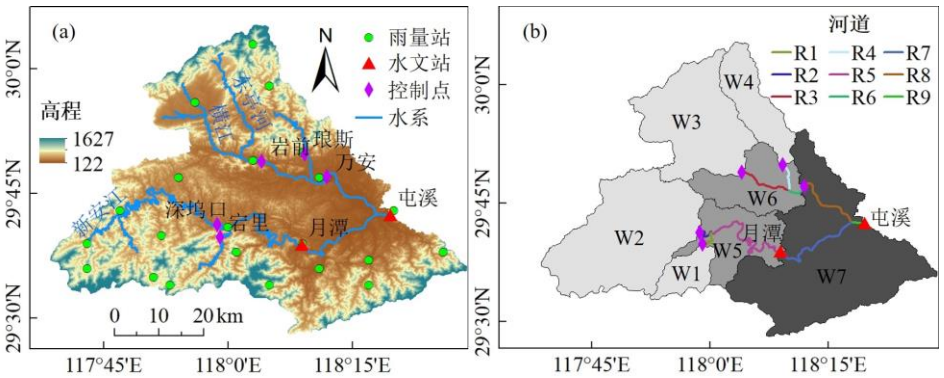

图 4 屯溪流域站点分布(a)及子流域划分(b)

Fig.4 Stations distribution (a) and sub-watershed discretization (b) of Tunxi watershed

3 结果与分析

3.1 方程形式对比实验结果与分析

以解析解为基准，设定理想的模型输入、参数和零初始条件，评估差分和微分形式 Muskingum 方法的数值求解误差。图 5(a)为差分和微分形式 Muskingum 法 50×1000 组模拟结果对应的E_{RMS}分布。微分形式 Muskingum 方法的E_{RMS}显著小于差分形式对应数值，其E_{RMS}最大值和中位数分别为 9.28×10^{-5} m³/s 和 8.86×10^{-9} m³/s。相比之下，差分形式 Muskingum 方法的E_{RMS}最大值为 47.77 m³/s，中位数为 0.33 m³/s。在变化强度情景下，选取差分形式 Muskingum 方法的E_{RMS}达到最大时对应的上游输入与参数组合，给出两种形式 Muskingum 方法的模拟流量过程线作为示例（见图 5(b)）。实验结果表明，基于 DP5 方法求解的微分形式 Muskingum 法具有很高的数值精度，可实现对解析解的高阶近似。

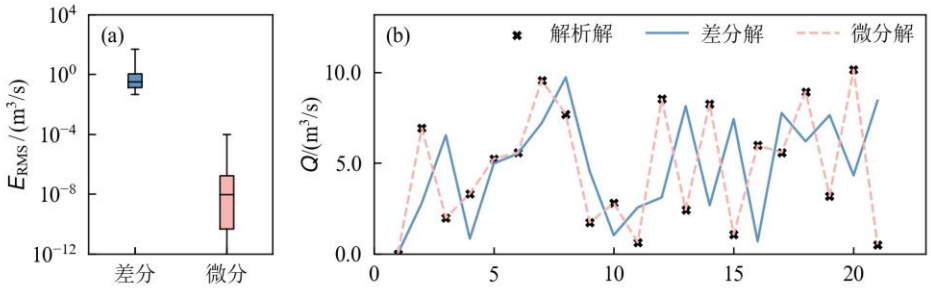

图 5 方程形式对比实验E_{RMS}分布(a)和模拟流量过程线对比(b)

Fig.5 E_{RMS} distribution (a) and comparison of simulated hydrograph (b) for different equation forms

3.2 耦合方法对比实验结果与分析

以屯溪流域 2007 年的逐日降水和蒸发为输入，基于 100×100 组模型参数组合，以全微分模型的模拟结果为基准，采用E_{RMS}指标评估混合微分-差分模型模拟过程与全微分模型的偏差，结果如图 6(a)所示。

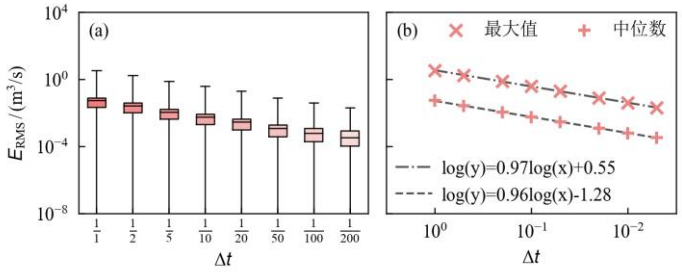

图 6 耦合方法对比实验E_{RMS}分布(a)和E_{RMS}最大值、中位数随Δt变化关系(b)

Fig.6 E_{RMS} distribution (a) and variation of maximum and median E_{RMS} with Δt (b) of different coupling method

在初始时间步长（1 倍Δt），E_{RMS}最大值和中位数分别为 3.44 m³/s 和 5.45×10^{-2} m³/s。当时间步长分别取初始步长的 1/2、1/20、1/200 时，其E_{RMS}最大值分别为 1.76、1.99×10^{-1} 和 2.01×10^{-2} m³/s，对应的中位数分别为 2.72×10^{-2}、2.83×10^{-3}、3.46×10^{-4} m³/s。在图 6(b)的双对数坐标系上，无论是最大值还是中位数，E_{RMS}和Δt拟合曲线斜率近似为 1，其意味随着时间步长的缩短，混合微分-差分模型的模拟过程按一阶精

度收敛至全微分模型。实验结果表明，基于差分形式 Muskingum 法的混合微分-差分耦合方法存在显著的数值误差，而基于微分形式 Muskingum 法的全微分耦合方法能够有效控制该数值误差。

3.3 实际流域应用验证结果与分析

3.3.1 日模型结果与分析 针对屯溪流域，以 2007 年为预热期，2008-2016 年为率定期，2017-2019 为验证期；使用 CMA-ES 分别率定 FD 和 DD 两类模型最优参数，结果见表 3 和表 4，日径流模拟精度见表 5。

表 3 屯溪流域混合微分-差分（DD）和全微分（FD）模型的 XAJ 日模参数

Tab.3 Daily-scale XAJ parameters of differential-difference and fully differential models in Tunxi watershed

流域	模型	K_e	W_{um}	W_{lm}	W_{dm}	b	c	A_{imp}	S_m
源头子流域	DD	1.44	11.29	89.41	25.66	0.15	0.17	0.01	19.92
	FD	1.18	9.08	89.86	31.85	0.10	0.16	0.01	10.00
区间子流域	DD	1.18	20.39	78.28	37.98	0.11	0.02	0.20	22.87
	FD	1.14	29.25	89.10	56.75	0.40	0.20	0.01	24.56
流域	模型	ex	K_i	K_g	C_i	C_g	n	K_f	
源头子流域	DD	1.29	0.54	0.16	0.59	0.994	4	4.06	
	FD	1.23	0.55	0.15	0.50	0.980	1	0.71	
区间子流域	DD	1.36	0.50	0.20	0.52	0.981	1	0.10	
	FD	1.00	0.55	0.15	0.54	0.980	1	0.14	

表 4 屯溪流域混合微分-差分和全微分模型的 Muskingum 日模参数

Tab.4 Daily-scale Muskingum model parameters of DD model and FD model in Tunxi watershed

河道	混合微分-差分模型		全微分模型	
	k	x	k	x
R1	22.9	0.36	10.1	0.49
R2	13.0	0.35	10.9	0.50
R3	11.6	0.18	1.0	0.49
R4	1.5	0.02	1.0	0.43
R5	6.8	0.39	13.8	0.50
R6	20.6	0.27	1.0	0.50
R7	2.0	0.04	1.0	0.01
R8	3.5	0.05	11.2	0.50
R9	5.7	0.49	8.8	0.50

表 5 混合微分-差分（DD）和全微分（FD）模型在屯溪站/月潭站日模型精度评价结果表

Tab.5 Daily-scale accuracy evaluation results of DD model and FD model in Tunxi/ Yuetan station

站点	阶段	年份	E_{KG}		E_{NS}		E_{FHV}/%		E_{FLV}/%	
			DD	FD	DD	FD	DD	FD	DD	FD
屯溪	率定	2008	0.91	0.95	0.90	0.96	-4.58	-3.27	-54.36	-46.28
		2009	0.86	0.87	0.88	0.90	12.74	17.31	-29.05	-28.54
		2010	0.92	0.95	0.91	0.92	-10.95	-9.29	-41.27	-41.99
		2011	0.88	0.93	0.87	0.95	-8.58	-5.06	-61.15	-58.04
		2012	0.94	0.97	0.90	0.94	0.48	3.39	-36.07	-30.78
		2013	0.91	0.94	0.88	0.92	-7.15	-4.54	-19.24	-28.72
		2014	0.92	0.92	0.89	0.93	-12.80	-8.11	-42.90	-45.02
		2015	0.88	0.93	0.89	0.92	-17.54	-12.83	-40.98	-37.82
		2016	0.89	0.95	0.87	0.93	-14.87	-9.90	-32.09	-34.40
	验证	2017	0.89	0.92	0.89	0.95	-2.35	-2.89	-55.64	-53.96
		2018	0.82	0.84	0.91	0.93	-9.87	-10.47	-49.37	-56.38
		2019	0.86	0.88	0.88	0.94	-10.41	-7.79	49.76	4.94
月潭	率定	2008	0.93	0.92	0.93	0.97	9.05	8.92	-57.61	-32.41
		2009	0.77	0.86	0.83	0.95	5.92	-0.38	-60.38	-44.17
		2010	0.91	0.96	0.89	0.96	-2.05	-1.46	-35.18	-13.42
		2011	0.90	0.94	0.83	0.93	-5.14	-6.42	-78.28	-55.17
		2012	0.90	0.95	0.81	0.94	11.90	3.95	-56.55	-36.52
		2013	0.93	0.97	0.87	0.95	2.43	1.61	0.06	46.47
		2014	0.90	0.90	0.88	0.95	-5.73	-6.38	-31.41	-12.04
		2015	0.90	0.97	0.86	0.95	-2.37	-0.36	-38.93	-20.19
		2016	0.95	0.98	0.90	0.96	-1.84	-0.57	-49.78	-32.63
	验证	2017	0.93	0.95	0.87	0.95	3.43	-1.20	-52.17	-32.35
		2018	0.80	0.79	0.83	0.89	-4.41	-10.24	-57.03	-51.66
		2019	0.90	0.90	0.85	0.90	-1.46	-6.00	41.64	53.03

从表 5 可以看出，在屯溪站，不管是率定期还是验证期，全微分模型的E_{FHV}均在±20%范围内，其E_{FHV}绝对值均值为 7.90%（率定期为 8.19%，验证期为 7.05%），小于混合微分-差分模型的 9.36%（率定期为 9.97%，验证期为 7.55%）；在所有年份全微分模型的E_{FLV}绝对值均值为 38.91%，小于混合微分-差分模型的 42.66%。在径流过程评定方面，全微分模型率定期和验证期的E_{NS}均值分别为 0.93 和 0.94，均比混合微分-差分模型高 0.04；全微分模型的率定期和验证期E_{KG}均值分别为 0.93 和 0.88，相对于混合微分-差分模型提升了 0.03 和 0.02。

在月潭站，不管是率定期还是验证期，全微分模型的E_{FLV}的绝对值均值均小于混合微分-差分模型，全微分模型的率定期和多年平均E_{FHV}绝对值均值分别为 3.34%和 3.96%，小于混合微分-差分模型的 5.16%和 4.64%。全微分模型在率定期和验证期E_{NS}均值为 0.95 与 0.91，大于混合微分-差分模型的 0.87 和 0.85。全微分模型的多年平均E_{KG}均值分别为 0.92，相对于混合微分-差分模型提升了 0.03。

上述结果表明，全微分模型比混合微分-差分模型具有更好的高/低流量捕捉能力，对屯溪流域出口/内部站点的日径流模拟均具有更好的效果。作为示例，图 7 给出了混合微分-差分和全微分模型在屯溪站和月潭站的模拟结果对比。

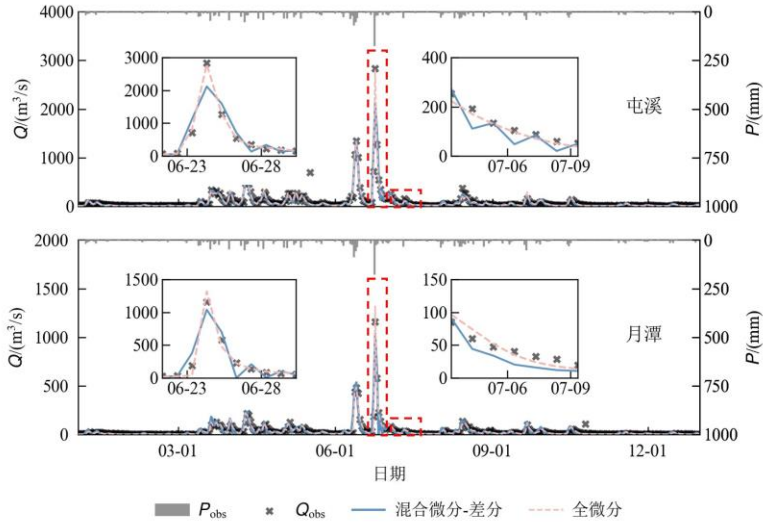

图 7 屯溪站和月潭站的验证期（2017 年）流量模拟结果

Fig.7 Simulation results in validation period (2017) at Tunxi and Yuetan stations

3.3.2 次洪模型结果与分析 选取 2010-2018 年间的 17 场洪水进行模拟，其中 2010-2016 年的 13 场进行率定，2017-2018 年的 4 场进行验证。采用与日模型相同的参数优化方法。次洪模拟整体精度统计（率定/验证期均值）见表 6。

表 6 混合微分-差分（DD）和全微分（FD）模型在屯溪站/月潭站次洪模拟整体精度统计表

Tab.6 Accuracy evaluation statistics of DD and FD models for flood event simulations in Tunxi/ Yuetan station

流域	时期	E_{KG}		E_{NS}		$\lvert E_{\mathrm{FVR}}\rvert$/%		$\lvert E_{\mathrm{FPR}}\rvert$/%		$\lvert E_{\mathrm{FPL}}\rvert$/h	
		DD	FD	DD	FD	DD	FD	DD	FD	DD	FD
屯溪	率定	0.82	0.85	0.81	0.82	5.03	5.04	9.77	7.73	2.62	2.38
	验证	0.83	0.86	0.82	0.83	12.37	9.71	10.19	8.08	3.25	3.50
月潭	率定	0.85	0.86	0.84	0.85	7.57	7.31	6.59	6.49	2.38	2.31
	验证	0.83	0.85	0.82	0.83	6.15	2.20	4.82	2.96	3.50	2.75

从表 6 可以看出，在屯溪站和月潭站，全微分模型在率定期和验证期的E_{FPR}、E_{FVR}及E_{FPL}等指标整体上均优于混合微分-差分模型；在径流过程评定指标上，E_{KG}和E_{NS}的平均值也更高。结果表明，小时尺度上，全微分模型同样具有更好的洪水过程模拟能力。

由此表明，本文提出的方法在日和小时尺度的洪水模拟中，均具有较好的适用性，因此控制河网流量演算的数值误差可有效提升模拟精度。作为示例，图 8 给出了混合微分-差分和全微分模型在屯溪站和月潭站的两场次洪模拟结果对比。

4 结论

本文提出了基于 Muskingum 的微分形式河网流量演算方法，将单一河道微分形式 Muskingum 方程扩展至河网尺度，通过方程形式对比实验、耦合方法对比实验以及实际流域应用验证，与经典差分形式 Muskingum 方法进行了对比分析。主要结论如下：

（1）基于微分形式 Muskingum 河道流量演算方法，使用矩阵组装河网所有河道相应方程，引入连通性矩阵确定组成河道的上游入流，提出了基于 Muskingum 的微分形式河网流量演算方法（ODE-MR）。方程形式对比实验表明，ODE-MR 可以高阶近似 Muskingum 方法的解析解，有效降低其差分形式数值求解误差。

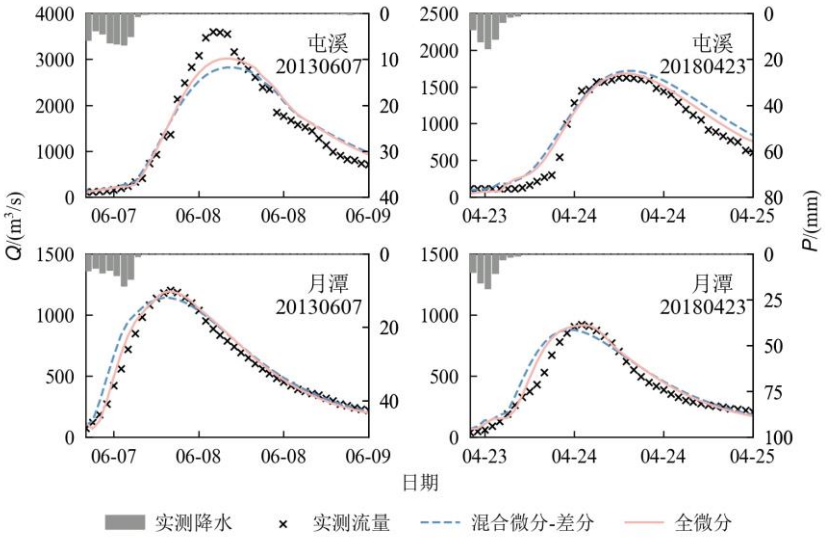

图 8 屯溪站和月潭站的次洪模拟结果

Fig.8 Flood events simulation results in Tunxi and Yuetan stations

（2）将 ODE-MR 与微分形式新安江模型耦合，构建了产流—汇流全过程微分统一表达的流域水文模型。耦合方法对比实验和实际应用结果表明，基于 ODE-MR 的全微分耦合方法相较基于其差分形式的混合微分-差分耦合方法，可有效控制河网流量演算及其耦合过程引入的数值误差，从而提高模型模拟精度。

本文构建了基于 Muskingum 的微分形式河网流量演算方法，并在湿润区流域进行了初步验证；该方法理论上具有普适性，可推广至其他水文模型及不同气候和地形条件的流域，但需进行针对性研究。

5 参考文献

[1] Zhu X, Zhou YL, Zhou P, et al. Optimization method of DEM subwatershed division for hydrological process simulation. *Journal of Lake Sciences*, 2025, 37(5): 1759-1770. [朱旭, 周玉良, 周平, 等. 面向水文过程模拟的 DEM 子流域划分优化方法. 湖泊科学, 2025, 37(5): 1759-1770.]

[2] Ji H, Song Y, Bindas T, et al. Distinct hydrologic response patterns and trends worldwide revealed by physics-embedded learning. *Nature Communications*, 2025, 16(1): 9169.

[3] Cunge J A. On the subject of a flood propagation computation method (muskingum method). *Journal of Hydraulic Research*, 1969, 7(2): 205-230.

[4] Todini E. A mass conservative and water storage consistent variable parameter muskingum-cunge approach. *Hydrology and Earth System Sciences*, 2007, 11(5): 1645-1659.

[5] Sun YQ, Bao WM, Zhou JW, et al. A bivariate coupling river flood routing model based on continuity equation. *Journal of Lake Sciences*, 2017, 29(4): 984-990. [孙逸群, 包为民, 周俊伟, 等. 基于连续方程的河道水流双变量耦合演算模型. 湖泊科学, 2017, 29(4): 984-990.]

[6] Clark M P, Kavetski D. Ancient numerical daemons of conceptual hydrological modeling: 1. Fidelity and efficiency of time stepping schemes. *Water Resources Research*, 2010, 46(10): 2009WR008894.

[7] La Follette P T, Teuling A J, Addor N, et al. Numerical daemons of hydrological models are summoned by extreme precipitation. *Hydrology and Earth System Sciences*, 2021, 25(10): 5425-5446.

[8] Fenicia F, Prieto C, Kavetski D. A historical perspective on modelling the relationship between catchment wetness and streamflow response. *Hydrological Sciences Journal*, 2025, 70(13): 2258-2277.

[9] Kochkov D, Yuval J, Langmore I, et al. Neural general circulation models for weather and climate. *Nature*, 2024, 632(8027): 1060-1066.

[10] Santos L, Thirel G, Perrin C. Continuous state-space representation of a bucket-type rainfall-runoff model: a case study with the GR4 model using state-space GR4 (version 1.0). *Geoscientific Model Development*, 2018, 11(4): 1591-1605.

[11] Jansen K F, Teuling A J, Craig J R, et al. Mimicry of a conceptual hydrological model (HBV): what's in a name?. *Water Resources Research*, 2021, 57(5): e2020WR029143.

[12] Goudarzi S, Milledge D, Holden J. A generalized multistep dynamic (GMD) TOPMODEL. *Water Resources Research*, 2023, 59(1): e2022WR032198.

[13] Liang ZM, Zhao JF, Duan YN, et al. Differential form Xinanjiang model. *Advances in Water Science*, 2024, 35(3): 374-386. [梁忠民, 赵建飞, 段雅楠, 等. 微分形式新安江模型. 水科学进展, 2024, 35(3): 374-386.]

[14] Dal Molin M, Kavetski D, Fenicia F. SuperflexPy 1.3.0: An open-source python framework for building, testing, and improving conceptual hydrological models. *Geoscientific Model Development*, 2021, 14(11): 7047-7072.

[15] Knoben W J M, Freer J E, Fowler K J A, et al. Modular assessment of rainfall–runoff models toolbox (MARRMoT) v1.2: An open-source, extendable framework providing implementations of 46 conceptual hydrologic models as continuous state-space formulations. *Geoscientific Model Development*, 2019, 12(6): 2463-2480.

[16] Lu MJ. Runge–Kutta Numerical Integration Solution of the Muskingum Method . *Journal of China Hydrology*, 1987(2): 17–20. [陆旻皎. 马斯京根法的龙格—库塔数值积分解. 水文, 1987(2): 17-20.]
[17] Shu L, Chen H, Meng X, et al. A review of integrated surface-subsurface numerical hydrological models. *Science China Earth Sciences*, 2024, 67(5): 1459-1479.
[18] McCarthy G T. The unit hydrograph and flood routing[C] *Conference of the North Atlantic Division. U.S. Army, Corps of Engineers*, 1938.
[19] Lynch S. Dynamical systems with applications using python[M]. Cham: Springer International Publishing, 2018.
[20] David C H, Maidment D R, Niu G Y, et al. River network routing on the NHDPlus dataset. *Journal of Hydrometeorology*, 2011, 12(5): 913-934.
[21] Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis[M]. 2 edition, corrected reprint. New York, NY: Cambridge University Press, 2017.
[22] Zhao RJ. The Muskingum Method: A Linear Finite-Difference Solution for River Flood Routing . *Journal of East China Water Resources Institute*, 1979(1): 44–56. [赵人俊. 马斯京根法——河道洪水演算的线性有限差解. 华东水利学院学报, 1979(1): 44-56.]
[23] Gong W, Duan Q Y, Li J D, et al. An intercomparison of sampling methods for uncertainty quantification of environmental dynamic models. *Journal of Environmental Informatics*, 2016, 28(1): 11-24.
[24] Dormand J R, Prince P J. A family of embedded runge-kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1980, 6(1): 19-26.
[25] Ouyang W, Ye L, Chai Y, et al. A differentiable, physics-based hydrological model and its evaluation for data-limited basins. *Journal of Hydrology*, 2025, 649: 132471.
[26] Lax P D, Richtmyer R D. Survey of the stability of linear finite difference equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1956, 9(2): 267-293.
[27] Hansen N, Ostermeier A. Completely derandomized self-adaptation in evolution strategies. *Evolutionary Computation*, 2001, 9(2): 159-195.
[28] Jackson E K, Roberts W, Nelsen B, et al. Introductory overview: error metrics for hydrologic modelling – a review of common practices and an open source library to facilitate use and adoption. *Environmental Modelling and Software*, 2019, 119: 32-48.
[29] Yilmaz K K, Gupta H V, Wagener T. A process-based diagnostic approach to model evaluation: Application to the NWS distributed hydrologic model. *Water Resources Research*, 2008, 44(9): 2007WR006716.